



TITLE:

単位元のノルム近似 (Approximation Theory in Functional Analysis)

AUTHOR(S):

佐伯, 貞浩

CITATION:

佐伯, 貞浩. 単位元のノルム近似 (Approximation Theory in Functional Analysis). 数理解析研究所講究録 1976, 265: 58-66

ISSUE DATE:

1976-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105849>

RIGHT:

単位元のノルム近似

都立大学・理 佐伯貞浩

単位元 1 を持つ Banach 環 B を考える。但し $\|1\| = 1$ と仮定する。各 $\varepsilon > 0$ に対し $\eta(\varepsilon) = \eta_B(\varepsilon)$ を

$$(i) \quad \|x\| \leq 1 \text{ かつ } \|1-x\|_{sp} < \varepsilon \Rightarrow \|1-x\| \leq \eta(\varepsilon)$$

を満たす最小の実数と定義する。こゝに $\|y\|_{sp} = \lim_m \|y^m\|^{1/m}$ とする。この論文では

$$(ii) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ のとき } \eta(\varepsilon) \rightarrow 0$$

が成立するかという問題を提起する。一般の B に対しては、この問題は否定的であるように思われるが、もしすべての B に対し肯定的であるならば (i) と (ii) を満たす $\eta(\varepsilon)$ とし、 B に無関係なものを選ぶ事ができる。後者をみるには、適当な Banach 環の列の無限テソソル積を考えればよい。以下では、いくつかの特殊な Banach 環に対して上の事が

成立する事を示そう。

まず G を局所コンパクトなアーベル群とし, G 上の有界正則な複素 Borel 測度全体が作る Banach 空間を $M(G)$ で表わす。従って $M(G)$ は, convolution を積として可換で半単純な Banach 環をなす:

$$\int_G f d(\mu * \nu) = \iint_{G \times G} f(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(G).$$

さらに G の単位元 0 における単位点測度を δ_0 で表わせば, これは $M(G)$ の単位元になる。

定理 1. $M(G)$ に対しては (i) と (ii) が成立する。即ち

$$\|\mu\| \leq 1 \text{ かつ } \|\delta_0 - \mu\|_{sp} < \varepsilon \Rightarrow \|\delta_0 - \mu\| < 4\varepsilon.$$

証明. G の指標群を Γ で表わす。従って $\mu \in M(G)$ の Fourier 変換は

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(x) d\mu(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

で定義され, $\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \hat{\nu}$ が成立する。さらに自然な方法により $\Gamma \subset \Delta_G$ と考えてよい。こゝに $M(G)$ の極大イデアル空間を Δ_G で表わす。特に $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_{sp}$ に注意する。

最初に G が離散群である場合を考える。このときは Γ はコンパクトであって、 $M(G) = L^1(G)$, $\Delta_G = \Gamma$, かつ

$$(1) \quad \mu(\{x\}) = \int_{\Gamma} \hat{\mu}(\gamma) \overline{\gamma(x)} d\gamma \quad \forall x \in G \text{ \& } \mu \in M(G)$$

が成立する。よって $\|\delta_0 - \mu\|_{sp} < \varepsilon$ とすれば

$$(2) \quad |1 - \hat{\mu}(\gamma)| \leq \|\delta_0 - \mu\|_{sp} < \varepsilon \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

であるから,

$$(3) \quad |1 - \mu(\{0\})| \stackrel{(1)}{=} \left| \int_{\Gamma} (1 - \hat{\mu}) d\gamma \right| \stackrel{(2)}{<} \varepsilon.$$

さらに $\|\mu\| \leq 1$ を仮定すると

$$\sum_{0 \neq x \in G} |\mu(\{x\})| = \|\mu\|_M - |\mu(\{0\})| \leq 1 - |\mu(\{0\})| \stackrel{(3)}{<} \varepsilon.$$

以上より $\|\delta_0 - \mu\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ を得る。

さて一般の場合を考える。このとき $M(G) = M_c(G) + M_d(G)$ と直和分解され、 M_c と M_d は各々 $M(G)$ の閉イデアル及び閉部分環である。よって $\nu \in M(G)$ の連続部分・離散部分を各々 ν_c と ν_d で表わせば、対応

$$\nu \longrightarrow \nu_d : M(G) \longrightarrow M_d(G) = M(G_d)$$

は準同型写像であり、従って $\|\nu_d\|_{sp} \leq \|\nu\|_{sp}$ が成立する。

以上の事に注意すれば, 定理の仮定の下に $\|\mu_d\| \leq 1$ がつ
 $\|\delta_0 - \mu_d\|_{sp} < \varepsilon$. よって前半の結果より $\|\delta_0 - \mu_d\| < 2\varepsilon$
 を得る。従って $\|\mu_d\| > 1 - 2\varepsilon$, $\|\mu_c\| < 2\varepsilon$, よって又

$$\|\delta_0 - \mu\| = \|\delta_0 - \mu_d\| + \|\mu_c\| < 4\varepsilon. \quad \text{Q. E. D.}$$

さて $\mathbb{T} \cong [-\pi, \pi)$ をトーラス, $\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{T}}$ を整数の全体とする。
 このとき \mathbb{T} 上の Fourier 環は

$$A(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T}) : \|f\|_A = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m)| < \infty\}$$

と定義される。こゝに

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-imt} dt \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

である。 $A(\mathbb{T})$ は $\ell^1(\mathbb{Z}) = M(\mathbb{Z})$ の Gelfand 表現と考え
 てよいから, 前定理により $\eta(\varepsilon) < 2\varepsilon$ が成立する。

補題 ([5] 参照). $0 < \varepsilon \leq \pi/2$ に対し

$$\omega(\varepsilon) = \inf \{ \|f\|_A : f(t) = 1 - e^{it} \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \}$$

と定義すると

$$\omega(\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

証明. $[-\pi, \pi)$ 上で φ を $\varphi(t) = \frac{2}{\pi} (\frac{\pi}{2} - |t|)$ により
定義すると, $\hat{\varphi} \geq 0$ が成立するから $\|\varphi\|_A = \varphi(0) = 1$
である。さて

$$\frac{\pi}{2(N+1)} < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2N}, \quad \psi(t) = \frac{\pi}{2N} \varphi(Nt - \frac{\pi}{2})$$

により自然数 $N = N_\varepsilon$ と $\psi \in A(\mathbb{T})$ を定めると

$$\psi(t) = t \quad \text{on} \quad [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}], \quad \|\psi\|_A = \frac{\pi}{2N}.$$

よって

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\psi(t)} &= 1 - e^{it} \quad \text{on} \quad [-\pi/2N, \pi/2N], \\ \|1 - e^{i\psi}\|_A &< e^{\|\psi\|} - 1 = \pi/2N + O(N^{-2}) \\ &= \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

定理 2. もし $x \in B^{-1}$ が

$$M \equiv \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|x^m\| < \infty, \quad \|1 - x\|_{sp} \leq \varepsilon$$

を満たせば

$$\|1 - x\| \leq M \cdot \omega[2 \operatorname{Sin}^{-1} \frac{\varepsilon}{2}] = M\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

証明. $d = 2 \operatorname{Sin}^{-1} \varepsilon/2$ とおくと, 補題より $\exists f \in A(\mathbb{T})$ s.t.

$$f(t) = 1 - e^{it} \quad \text{on} \quad [-d, d], \quad \|f\|_A = \omega(d).$$

一方仮定より $\sigma_p(x) \subset \{e^{it} : -d \leq t \leq d\}$ となるから

$$\|1 - x\| = \left\| \sum_m \hat{f}(m) x^m \right\| \leq M \|f\|_A \leq M \omega(d). \quad \text{Q. E. D.}$$

系 (Browder [3], Sinclair [6]). もし $y \in B$ が
すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|e^{ity}\| \leq M$ を満たせば,
 $\|y\| \leq M \|y\|_{sp}$ が成立する。

証明. $\varepsilon \equiv \|y\|_{sp} < 1$ としてよい. このとき

$$\sup_m \|e^{imy}\| \leq M \quad \text{かつ} \quad \|1 - e^{iy}\|_{sp} \leq 2 \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

であるから前定理より $\|1 - e^{iy}\| \leq M\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. よって
 y を ty で置き代えて

$$\|1 - e^{ity}\| \leq M \cdot t\varepsilon + O(t^2) \quad (|t| < 1).$$

両辺を t で割って $t \rightarrow 0$ とすれば, $\|y\| \leq \|y\|_{sp} \cdot M$
を得る. Q. E. D.

これまでに述べたすべての結果は, やゝ自明であるが,
次に自明でない結果を与えよう. 2つのコンパクト空間 X_1
と X_2 に対し, $X = X_1 \times X_2$ と置いて

$$V(X) = C(X_1) \hat{\otimes} C(X_2) \subset C(X)$$

と定義する。こゝに記号 $\hat{\otimes}$ は最大のクロス・ノルムに関するテンソル積の完備化を表わす。従って $V(X)$ は $\mathbb{C}(X)$ の稠密な部分環であって、

$$\begin{cases} f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) h_m(y) & \forall x \in X_1 \text{ \& } y \in X_2, \\ \text{但し } M = \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_{\infty} \cdot \|h_m\|_{\infty} < \infty \end{cases}$$

の形の展開を持つ $f \in \mathbb{C}(X)$ の全体より成る。さらに f の V -norm $\|f\|_V$ は 上のような展開に関する M の下限で定義される。

定理 3 (Kaijser [4]). $B = V(X)$ に対し (i) と (ii) を満たす $\eta(\varepsilon)$ が存在する。

この証明は次の 2 つの補題と Jensen の不等式より導かれるが、詳しい証明は [4] に譲る。

補題. $f_i, g_i \in \mathbb{C}(X_i)$, $\Lambda \in V'(X)$ とし

$$\|\Lambda\| \leq 1, \quad \|f_i\|_{\infty} \leq 1, \quad \|g_i\|_{\infty} \leq 1 \quad (i=1, 2)$$

$$\operatorname{Re} \langle f_1 \otimes f_2, \Lambda \rangle \geq 1 - x,$$

$$\operatorname{Re} \{ \langle f_1 \otimes g_2 + g_1 \otimes f_2, \Lambda \rangle \} \geq 2 - y$$

を仮定する。このとき

$$|1 - \langle g_1 \otimes g_2, \Lambda \rangle| \leq \eta(x, y), \quad \text{但し}$$

$$\eta(x, y) = \sqrt{2y} + \pi(2x + \sqrt{2x} + \sqrt{2y})^{1/2}.$$

補題 (Bohnenblust - Karlin [1]). 任意の Banach 環 B と任意の $x \in B$ に対し

$$\|x\| \leq e \cdot \sup \{ |\langle x, \varphi \rangle| : \|\varphi\|_{B'} = 1 = \varphi(1_B) \}.$$

さて各 $\varepsilon > 0$ と自然数 n に対し コンパクト 集合

$$K_\varepsilon^n = \{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n : |1 - \frac{e^{it_1} + \dots + e^{it_n}}{n}| \leq \varepsilon \}$$

を考え,

$$\left\| 1 - \frac{e^{it_1} + \dots + e^{it_n}}{n} \right\|_{A(K_\varepsilon^n)} = \inf \|f\|_{A(\mathbb{T}^n)}$$

と定義する。こゝに \inf は $f(t_1, \dots, t_n) = 1 - (e^{it_1} + \dots + e^{it_n})/n$ on K_ε^n を満たす $f \in A(\mathbb{T}^n)$ について取る。

予想.
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \left\| 1 - \frac{e^{it_1} + \dots + e^{it_n}}{n} \right\|_{A(K_\varepsilon^n)} = 0.$$

もしこの予想が成立すれば、定理 3 は無限個の $\mathbb{C}(X)$ 空間のテンソル積についても成立する。もっと一般に、上の事を仮定すると、Fourier 環 $A(G)$ の restriction algebra $A(E) = A(G)|_E$ と同型なすべての Banach 環 B に対し (i) と (ii) を満たす $\eta(E)$ の存在が云える。近い将来に於て

再びこの問題について論ずる機会を与えられれば、幸いである。

文 献

- [1] H.F. Bohnenblust & S. Karlin, Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras, *Ann. Math.* 62 (1955), 217-229.
- [2] F.F. Bonsall & M.J. Crabb, The spectral radius of a Hermitian element of a Banach algebra, *Bull. London Math. Soc.* 2 (1970), 178-180.
- [3] A. Browder, On Bernstein's inequality and the norm of Hermitian operators, *A.M. Month.* 78 (1971).
- [4] S. Kaijser, Representations of tensor algebras --- , *Ark. Mat.* 10 (1972), 107-141
- [5] S. Saeki, Infinite tensor products in Fourier algebras, *Tôhoku Math. J.* 27 (1975), 355-379.
- [6] A.M. Sinclair, The norm of a Hermitian element in a Banach algebra